Monte-Carlo Integration - Grundlagen

Lukas Schröder

Institut für Kern- und Teilchenphysik
Technische Universität Dresden

10. November 2013

Geschichte

Monte-Carlo-Simulation

Monte-Carlo Integration

- Wahrscheinlichkeitstheorie
  - Gesetz der großen Zahlen
  - Der zentrale Grenzwertsatz
- Integration
- Fehlerabschätzung
- Beispielprogramm

Fazit und Ausblick

Geschichte

Geschichte

- 1930 Enrico Fermi führt erste Experimente im Sinne der Monte-Carlo Methode durch

Geschichte

- 1930 Enrico Fermi führt erste Experimente im Sinne der Monte-Carlo Methode durch
- 1946 Stanislaw Ulam arbeitet in Los Alamos und hat Idee zur Monte-Carlo Methode

Geschichte

- 1930 Enrico Fermi führt erste Experimente im Sinne der Monte-Carlo Methode durch
- 1946 Stanislaw Ulam arbeitet in Los Alamos und hat Idee zur Monte-Carlo Methode
- entwickelt Methode mit John von Neumann

Geschichte

- 1930 Enrico Fermi führt erste Experimente im Sinne der Monte-Carlo Methode durch
- 1946 Stanislaw Ulam arbeitet in Los Alamos und hat Idee zur Monte-Carlo Methode
- entwickelt Methode mit John von Neumann
- Zufallszahlen damals aus Zufallszahlentabellen entnommen

Geschichte

- 1930 Enrico Fermi führt erste Experimente im Sinne der Monte-Carlo Methode durch
- 1946 Stanislaw Ulam arbeitet in Los Alamos und hat Idee zur Monte-Carlo Methode
- entwickelt Methode mit John von Neumann
- Zufallszahlen damals aus Zufallszahlentabellen entnommen
- Geheimprojekt
  $\Longrightarrow$ Neumann wählt Namen "Monte-Carlo"

Geschichte

- 1930 Enrico Fermi führt erste Experimente im Sinne der Monte-Carlo Methode durch
- 1946 Stanislaw Ulam arbeitet in Los Alamos und hat Idee zur Monte-Carlo Methode
- entwickelt Methode mit John von Neumann
- Zufallszahlen damals aus Zufallszahlentabellen entnommen
- Geheimprojekt
  $\Longrightarrow$ Neumann wählt Namen "Monte-Carlo"
- Referenz zum Monte Carlo Casino in Monaco

Geschichte

- 1930 Enrico Fermi führt erste Experimente im Sinne der Monte-Carlo Methode durch
- 1946 Stanislaw Ulam arbeitet in Los Alamos und hat Idee zur Monte-Carlo Methode
- entwickelt Methode mit John von Neumann
- Zufallszahlen damals aus Zufallszahlentabellen entnommen
- Geheimprojekt
  $\Longrightarrow$ Neumann wählt Namen "Monte-Carlo"
- Referenz zum Monte Carlo Casino in Monaco
  - Ulam's Onkel hat im Monte Carlo Casino gespielt

Geschichte

- 1930 Enrico Fermi führt erste Experimente im Sinne der Monte-Carlo Methode durch
- 1946 Stanislaw Ulam arbeitet in Los Alamos und hat Idee zur Monte-Carlo Methode
- entwickelt Methode mit John von Neumann
- Zufallszahlen damals aus Zufallszahlentabellen entnommen
- Geheimprojekt
  $\Longrightarrow$ Neumann wählt Namen "Monte-Carlo"
- Referenz zum Monte Carlo Casino in Monaco
  - Ulam's Onkel hat im Monte Carlo Casino gespielt
  - erste Zufallszahlentabellen vom Monte Carlo Casino anhand der Roulette-Ergebnisse erstellt

- 1949 Veröffentlichung der Methode mit Nicholas Metropolis

- 1949 Veröffentlichung der Methode mit Nicholas Metropolis
- genutzt für die Entwicklung der Wasserstoffbombe

- 1949 Veröffentlichung der Methode mit Nicholas Metropolis
- genutzt für die Entwicklung der Wasserstoffbombe
- Zunächst Weiterentwicklung auf militärischem Gebiet

- 1949 Veröffentlichung der Methode mit Nicholas Metropolis
- genutzt für die Entwicklung der Wasserstoffbombe
- Zunächst Weiterentwicklung auf militärischem Gebiet
- Entwicklung/Verbesserung von computergestützten Rechentechniken

- 1949 Veröffentlichung der Methode mit Nicholas Metropolis
- genutzt für die Entwicklung der Wasserstoffbombe
- Zunächst Weiterentwicklung auf militärischem Gebiet
- Entwicklung/Verbesserung von computergestützten Rechentechniken
  $\Longrightarrow$ Einzug in viele zivile Bereiche

Monte-Carlo-Simulation

Monte-Carlo-Simulation

Gruppe von Algorithmen, welche Zufallszahlen nutzen um Prozesse zu simulieren oder um zu approximativen Lösungen zu gelangen

Monte-Carlo Integration

Wahrscheinlichkeitstheorie

Wahrscheinlichkeitstheorie

arithmetischer Mittelwert einer Zufallsvariablen x:

$$\langle x \rangle = \int x\varphi(x)dx \qquad \varphi(x)...Wahrscheinlichkeitsdichte$$

Varianz und Standardabweichung:

$$Var(x) = \sigma^2(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

Gesetz der großen Zahlen

Gesetz der großen Zahlen

Der Mittelwert eines Zufallsexperiments nähert sich mit wachsender Anzahl an Wiederholungen (unter gleichen Bedingungen) dem Erwartungswert an.

Gesetz der großen Zahlen

Der Mittelwert eines Zufallsexperiments nähert sich mit wachsender Anzahl an Wiederholungen (unter gleichen Bedingungen) dem Erwartungswert an.

$\Longrightarrow$ Spielerfehlschluss (Gambler's fallacy): "Der Zufall hat kein Gedächtnis."

Gesetz der großen Zahlen

Der Mittelwert eines Zufallsexperiments nähert sich mit wachsender Anzahl an Wiederholungen (unter gleichen Bedingungen) dem Erwartungswert an.

$\Longrightarrow$ Spielerfehlschluss (Gambler's fallacy): "Der Zufall hat kein Gedächtnis."

$$\overline{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - E(X_i))$$

schwaches Gesetz der großen Zahlen

$$\lim_{N\to\infty} P\left(|\overline{X}_N| > \varepsilon\right) = 0 \qquad \varepsilon > 0$$

starkes Gesetz der großen Zahlen

$$P\left(\lim_{N\to\infty} |\overline{X}_N| = 0\right) = 1$$

Der zentrale Grenzwertsatz

Der zentrale Grenzwertsatz

Die Verteilung des Mittelwertes von N unabhängigen Zufallsvariablen $x = (x_1, ..., x_d)$ aus einer beliebigen Verteilung f(x) mit endlichem Erwartungswert μ und endlicher Standardabweichung σ nähert sich mit zunehmenden N immer mehr einer Normalverteilung an.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

Integration

$$\mathrm{I} = \int f(x)dx = \int d^d y\, f(y_1, y_2, ..., y_d) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

Integration

$$\mathrm{I} = \int f(x)dx = \int d^d y\, f(y_1, y_2, ..., y_d) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

Gesetz der großen Zahlen $\Longrightarrow$

$$\mathrm{I} \approx A = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

Integration

$$\mathrm{I} = \int f(x)dx = \int d^d y\, f(y_1, y_2, ..., y_d) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

Gesetz der großen Zahlen $\Longrightarrow$

$$\mathrm{I} \approx A = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

zentraler Grenzwertsatz $\Longrightarrow$

$$A = \langle f(x) \rangle$$

Fehlerabschätzung

Fehlerabschätzung

zentraler Grenzwertsatz
$\Longrightarrow$ Standardabweichung aus Normalverteilung

$$\sigma^2(f) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\right)^2$$

$$\sigma^2(f) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)^2 - \qquad A^2$$

$\Longrightarrow$ Standardabweichung der Monte-Carlo Integration skaliert mit $\frac{1}{\sqrt{N}}$
unabhängig von der Dimension

Beispielprogramm

Volumen einer n-dimensionalen Kugel

- Grundprogramm
- Volumen und Fehlerskalierung in Abhängigkeit von der Anzahl der generierten Zufallszahlen
- Volumen und Fehlerskalierung in Abhängigkeit von der Dimension

Fazit

Fazit

- Monte-Carlo-Integration ist anderen numerischen Verfahren überlegen bei höheren Dimensionen
    - z.B. Trapezmethode $\sigma = \frac{1}{N^{\frac{2}{n}}} \Rightarrow$ Monte-Carlo besser ab n = 5

Fazit

- Monte-Carlo-Integration ist anderen numerischen Verfahren überlegen bei höheren Dimensionen
  - z.B. Trapezmethode $\sigma = \frac{1}{N^{\frac{2}{n}}} \Rightarrow$ Monte-Carlo besser ab n = 5

$\Longrightarrow$ Verbesserung und Optimierung für spezielle Probleme

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit!