Monte-Carlo-Methode: Importance Sampling

Christian Bartzsch

Technische Universität Dresden

18. November 2013

Inhaltsverzeichnis

Definition

Definition: Monte-Carlo-Methode

Nummerische Lösung von Problemen mit Hilfe von Zufallszahlen nach Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

- Behandlung von komplexen Problemen höherer Dimension
- Simulation von Ereignissen mit gewissen Wahrscheinlichkeiten
- typisches Problem in der Physik besteht aus 7 Dimensionen: $\vec{r}, \vec{p}, t$

- jedes mathematische / physikalische Problem muss durch stochastisches Modell genähert werden
- aus der Realisierung der Zufallsvariable müssen für das Ausgangsproblem Schätzwerte ermittelt werden

Problem

- große Zahl von Wiederholungen nötig
- nur gleichverteilte Zufallszahlen
- Abschätzen des Simulationsergebnises fehlerbehaftet

- Physikalische Probleme in Computersimulationen auf Lösung einer nummerischen Quadratur

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \mathrm{d}x$$

- Monte-Carlo Verfahren mit Random Sampling (Zufallszahlen gleichverteilt im Intervall $[x_1, x_2]$)

$$I \approx (x_2 - x_1) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

Definition

Importance Sampling

... ist ein Verfahren zur Generierung der Strichprobe von einer diskreten Zufallszahl X mit einer bestimmten Verteilungsfunktion $W(x)$

- Stichproben einer Verteilung generiert, deren Zufallsvariable eine höhere Bedeutung für die zu untersuchende Funktion hat
- Ereignisse / Bereiche von geringerer Bedeutung ignoriert
- durch geschickteres Verteilen der Stichproben kann Varianz reduziert werden
- Reduzierung des Fehlers

- Verbesserung des Random Samplings durch Verwendung anderer Verteilung $w(x)$

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x) \cdot w(x)}{w(x)}\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{w(x)}\mathrm{d}W(x)$$

mit Wahrscheinlichkeitsdichte $w(x) = \frac{\partial}{\partial x} W(x) \geq 0$

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{w(x)} \mathrm{d}W(x) \overset{\text{MC}}{\approx} \frac{x_2 - x_1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{f(x_i)}{w(x_i)}$$

Nachteil

- Wahl der Dichtefunktion:
  $w(x) \to 0 \ \rightsquigarrow$ Varianz $\sigma^2\left(\frac{f}{p}\right) \to \infty$

- Wahl der Dichtefunktion:
  $w(x) = c \cdot f(x) = \frac{f(x)}{I} \ \rightsquigarrow$ Varianz $\sigma^2\left(\frac{f}{p}\right) \to 0$
  Bestimmung der Normierung $\frac{1}{c} = |I|$ nicht bekannt, da I selbst zu berechnen ist.

Transformationsmethode

- bekannte Verteilung $w(x)$ ist integrierbar $W(x)$
- Invertierung nur möglich, wenn W^{-1} berechenbar
- Zufallszahl $\xi = W(x)$ mit $\xi \in (0, 1)$

Algorithmus:

- ziehe ξ aus der Gleichverteilung $[0, 1]$
- ermittle gewichtetes x aus der Umkehrfunktion $x = W^{-1}(\xi)$

Beispiel: Exponentialverteilung

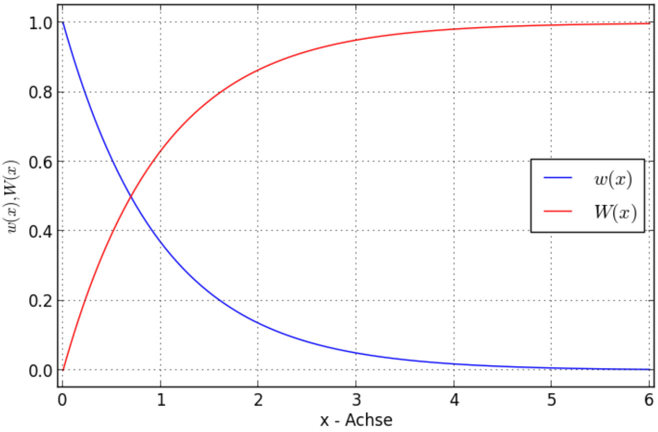
Gleichverteilte Zufallszahlen:

$$\phi(\xi) = \begin{cases} 0 & \xi < 0 \\ \xi & 0 \leq \xi \leq 1 \\ 1 & \xi \geq 1 \end{cases}$$

Verteilung ist gegeben durch

$$w(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \quad \overset{\int \mathrm{d}x}{\Rightarrow} \quad W(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}$$

$$W^{-1}(\xi) = x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\xi)$$



1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
$w(x), W(x)$
0
1
2
3
4
5
6
x - Achse
$w(x)$
$W(x)$

Programmbeispiel

Berechnung des Integrals ohne Importance Sampling

$$I = \int_0^1 \cos(x) \cdot e^{-5 \cdot x} \mathrm{d}x$$

Schätzung des Integrals mit gleichverteilten Zufallszahlen

$$I \approx \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N} \cos(\xi_i) \cdot e^{-5 \cdot \xi_i}$$

Programmbeispiel

Berechnung des Integrals mit Importance Sampling

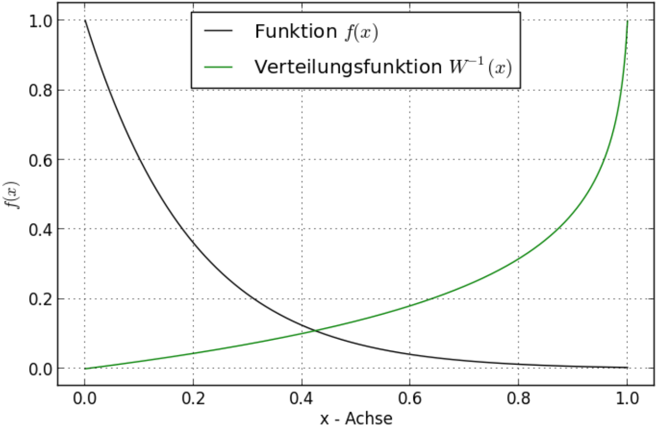
$$I = \int_0^1 \cos(x) \cdot e^{-5\cdot x} \mathrm{d}x = I_1 \cdot \int_0^1 \cos(x) \cdot \overbrace{\frac{e^{-5\cdot x}}{I_1}}^{w(x)} \mathrm{d}x$$

Bestimmung der Verteilungsfunktion

$$\xi = W(x) = \int_0^\eta \frac{e^{-5\cdot x}}{I_1} \mathrm{d}x \;\Rightarrow\; \eta = -\frac{1}{5} \log(1 - 5 \cdot I_1 \cdot \xi)$$

Schätzung des Integrals nach Importance Sampling

$$I \approx \frac{I_1}{N} \sum_{i=0}^{N} \cos(\eta_i) \;\text{ mit }\; I_1 = \int_0^1 e^{-5\cdot x} \mathrm{d}x = 0.1986524$$


Funktion $f(x)$
Verteilungsfunktion $W^{-1}(x)$
$f(x)$
x - Achse
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Quellen & Literatur

[1] Beratung durch Frank Siegert

[2] Weinzierl, Stefan: *Introduction to Monte Carlo methods*, NIKHEF Theory Group, `http://arxiv.org/pdf/hep-ph/0006269v1.pdf`, letzter Abruf 17.11.2013

[3] Kernbichler, Winfried; Theis, Christian: *Grundlagen der Monte Carlo Methoden*, TU Graz, Institut für Theoretische Physik - Computational Physics, `http://itp.tugraz.at/MML/MonteCarlo/MCIntro.pdf`, letzter Abruf 14.11.2013

[4] Gentle, James E.: *Random Number Generation and Monte Carlo Methods*, 2. Auflage, Springer-Verlag New York 2003

[5] Rauch, Micheal: *Die Monte-Carlo-Methode zur Simulation von Teilchenreaktionen*, Karlsruher Institut für Technologie, 7. März 2010