TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN
Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften, Fachrichtung Physik

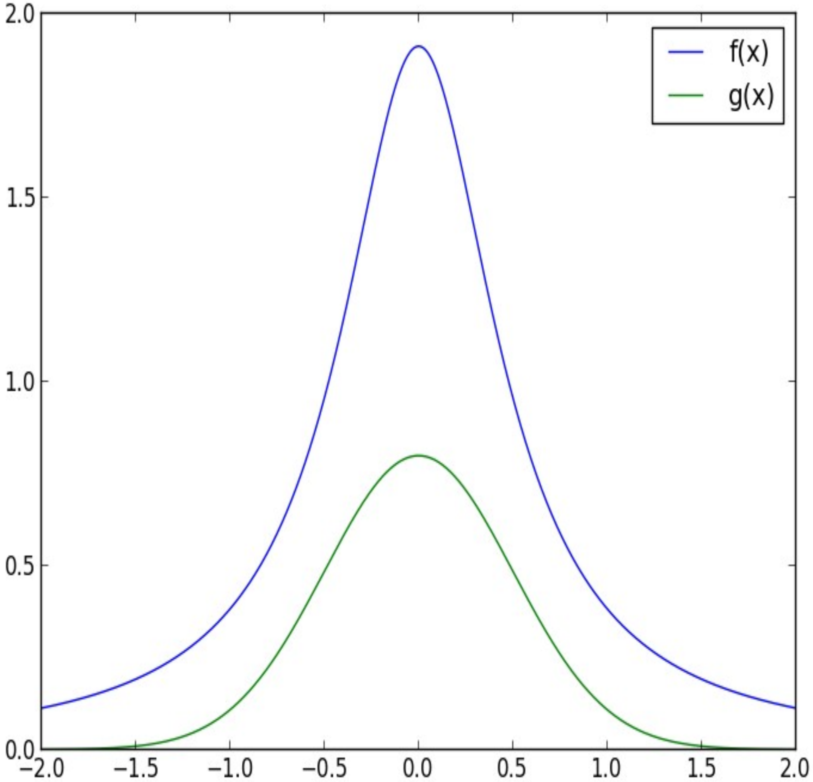
Multi-Channel Monte Carlo

Dresden, 8. Dez 2013

Johannes Krause

Gliederung

01 Wiederholung: Importance Sampling



Gesucht: $\int f(x)\,dx$

→ Hilfsfunktion g(x) mit: $\int g(x)\,dx = 1$

Umformung:

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{f(x)}{g(x)} g(x)\,dx = \int \frac{f(x)}{g(x)}\,dG(x)$$

Ergebnis:

$$E = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$$

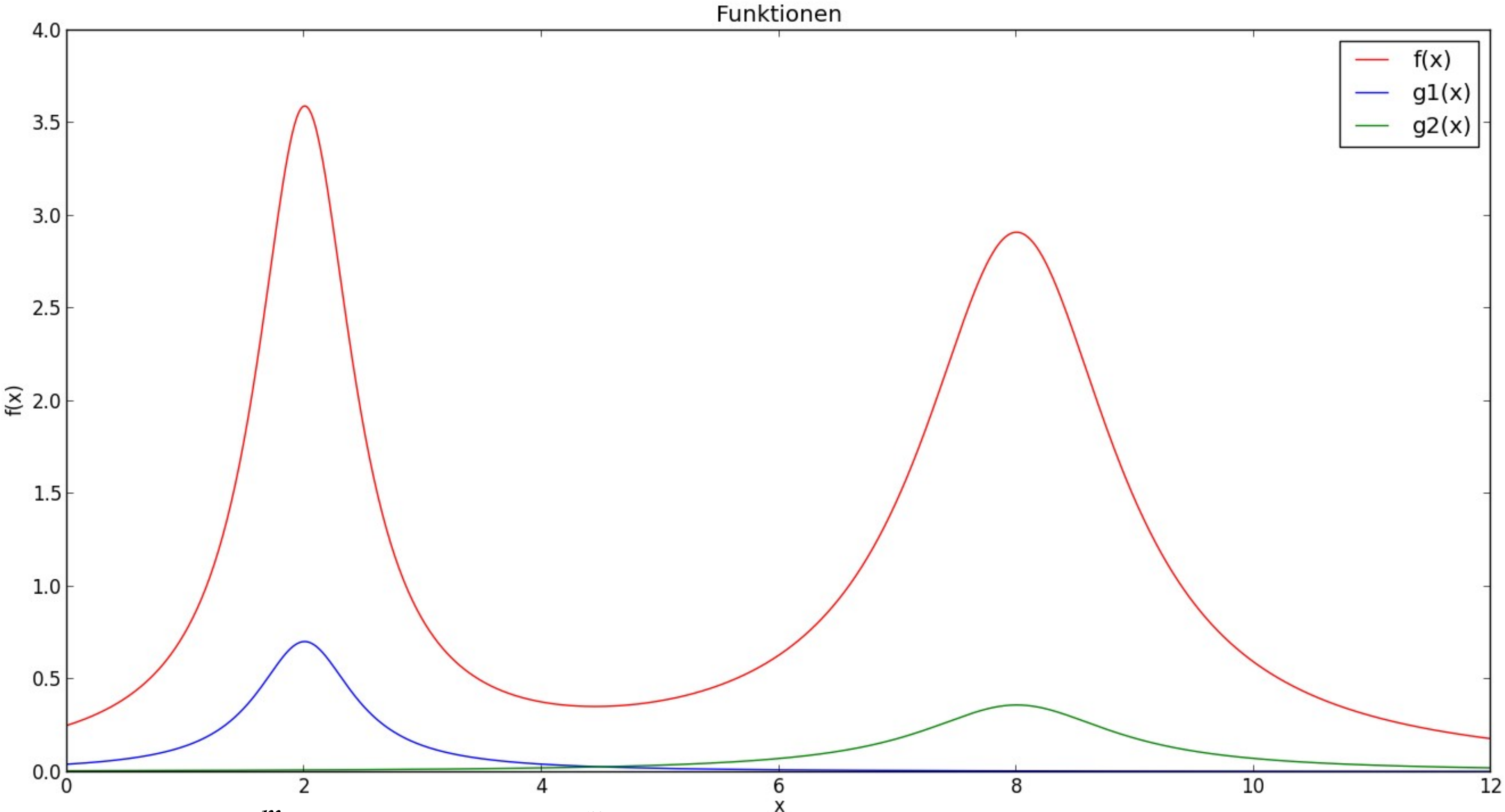
Fehler:

$$\sigma = \sqrt{\frac{S^2}{N}} \qquad S^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \right)^2 - E^2$$

X_n: nach g(x) verteilte Zufallszahlen

02 Multi-Channel MC

Motivation / Idee



$$g(x)=\sum_{i=1}^{m} g_i(x)\alpha_i \qquad \sum_{i=1}^{m}\alpha_i=1,\ \int g_i(x)\,dx=1 \quad \rightarrow \quad \int g(x)\,dx=1$$

Bestimmung des Erwartungswertes

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{f(x)}{g(x)} g(x)\,dx = \int w(x)\,g(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \int w(x)\,g_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \int w(x)\,dG_i(x)$$

- Monte-Carlo-Auswertung der Teilintegrale (mit N_i Zahlen):

$$\boxed{\int f(x)\,dx \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{m} \sum_{n_i=1}^{N_i} w(x_{n,i})}$$

mit $\alpha_i = \dfrac{N_i}{N}, \quad w(x_{n,i}) = \dfrac{f(x_{n,i})}{g(x_{n,i})}$

- $X_{n,i}$ sind nach $g_i(x)$ verteilte Zufallszahlen (→ Vortrag Sampling)
- Transformation der Grenzen! → $a' = G_i(a)$

02 Multi-Channel MC

Bestimmung des Fehlers

$$\sigma = \sqrt{\frac{\langle w^2 \rangle - \langle w \rangle^2}{N}} = \sqrt{\frac{W(\alpha) - I^2}{N}}$$

$$W(\alpha) = \int g(x) w(x)^2 dx = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \int g_i(x) w(x)^2 dx$$

- Monte-Carlo-Ausdruck:

$$\boxed{W(\alpha) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{m} \sum_{n_i=1}^{N_i} w(x_{n,i})^2}$$

Minimierung der Varianz

$$\sigma = \sqrt{\frac{W(\alpha) - I^2}{N}}$$ → Ziel: Minimierung von W(α)

- Definiere: $$W_i(\alpha) \equiv \frac{\partial W(\alpha)}{\partial \alpha_i} = \int g_i(x) w(x)^2$$

- W(α) dann minimal, wenn $W_i(\alpha)$ aller Kanäle gleich

$$\forall i, j: \quad W_i(\alpha) = W_j(\alpha) \quad \longleftrightarrow \quad \forall i: \quad W_i(\alpha) = W(\alpha)$$

- Beweis, dass Bed. für Minimum: → entwickle W(α):

$$\alpha_i' = \alpha_i + \beta_i \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} \beta_i = 0$$

$$W(\alpha') = W(\alpha) + \frac{1}{2} \int \frac{f(x)^2}{g(x)^3} \left(\sum_{i=1}^{m} \beta_i g_i(x) \right)^2 dx + O(\beta_i^3)$$

03 Optimierung der stat. Gewichte

Beispiel für Minimierung

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i g_i(x)$$

→ optimale α_i:

$$\alpha_i = \frac{c_i}{\sum_{i=1}^{m} c_i}$$

$$\longrightarrow \quad W_i(\alpha) = W(\alpha) = \left(\sum_{i=1}^{m} c_i\right)^2$$

$$I = \sum_{i=1}^{m} c_i \quad \longrightarrow \quad I^2 = W(\alpha)$$

⟶ theoretisch: Monte-Carlo-Fehler = 0

03 Optimierung der stat. Gewichte

Reale Anwendung

- unbekannte Funktion: genaue Bestimmung von α schwierig

  → numerische Annährung: großes/kleines W_i erfordert großes/kleines α_i

$$\alpha_i^{neu} \propto \alpha_i \sqrt{W_i}$$

- Normierung:

$$\alpha_i^{neu} = \frac{\alpha_i \left(W_i\right)^\beta}{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left(W_i\right)^\beta} \qquad \beta \approx \frac{1}{4} \; ... \; \frac{1}{2}$$

04 Zusammenfassung / Quellen

Zusammenfassung

- adaptive Methode zur Varianzreduktion

- gut geeignet für Funktionen mit vielen Peaks

Quellen

- R. Kleiss, R. Pittau: „Weight optimization in multichannel Monte Carlo“
- Stefan Weinzierl: „Introduction to Monte Carlo methods“