TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Monte-Carlo Sampling Basics

Dresden, 6. Jan 2014

DRESDEN concept
Exzellenz aus Wissenschaft und Kultur

Gliederung

- Einleitung

- Transformationsmethode
  - Box Müller
  - Breit Wigner

- Verwerfungsmethode
  - Polar-Methode
  - Ziggurat-Methode

Einleitung

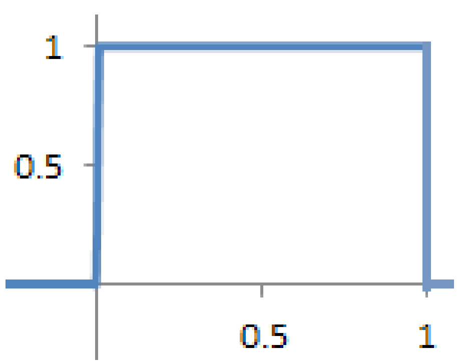
- Definition der Verteilungsfunktion:

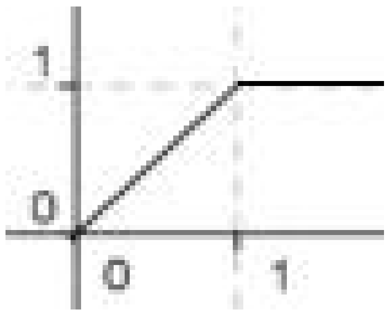
$$F(x) = P(x' < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x')\,dx'$$

- Definition der Dichtefunktion:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

- Anwendung von nicht-gleichverteilten Zufallszahlen: Importance Sampling, Multichannel





TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Transformationsmethode

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}$$

- Wahrscheinlichkeitserhaltung bei Transformation

$$|d\,F(x)|=|dF(y)|\Rightarrow|f(x)dx|=|f(y)dy|\Rightarrow f(x)=f(y)\left|\frac{dy}{dx}\right|$$

- Gesucht: y=g(x) mit
  - f(y): gleichverteilt
  - f(x): gewollte Verteilungsdichte

$$f(x)=\left|\frac{dg(x)}{dx}\right|$$

- Formel zur Berechnung der Zufallszahlen mit gewünschter Verteilung:

$$x=F^{-1}(y)$$

- Beispiel für eine Exponentialfunktion beim Vortrag über Importance Sampling

DRESDEN concept
Exzellenz aus Wissenschaft und Kultur

Box Müller Verfahren

- Erstellung zweier normalverteilter, unkorrelierter Zufallsvariablen:

$$f(x_1, x_2) = f(x_1)\, f(x_2) = \frac{1}{2\pi}\, \mathrm{e}^{\frac{-(x_1^2 + x_2^2)}{2}}$$

$$x_1 = r\cos(\vartheta)$$
$$x_2 = r\sin(\vartheta)$$

- Verteilungsfunktion:

$$F(\vartheta)\, F(r) = \int_0^{\vartheta} d\vartheta' \frac{1}{2\pi} \int_0^{r} \mathrm{dr}'\, e^{\frac{-r'^2}{2}}\, r' = y_1 y_2$$

- Inverse:

$$\vartheta = 2\pi y_1 \qquad r = \sqrt{-2\ln(1 - y_2)}$$

- Formeln für die Zufallszahlen mit der gewünschten Verteilung:

$$x_1 = \sqrt{-2\ln(y_2)}\cos(2\pi y_1) \qquad x_2 = \sqrt{-2\ln(y_2)}\sin(2\pi y_1)$$

Breit Wigner Verteilung

- Gegebene Dichte:

$$f(x)=\frac{\gamma}{\pi\left(\gamma^2+(x-x_0)^2\right)}$$

- Dazugehörige Verteilung:

$$\gamma=1 \qquad x_0=0$$

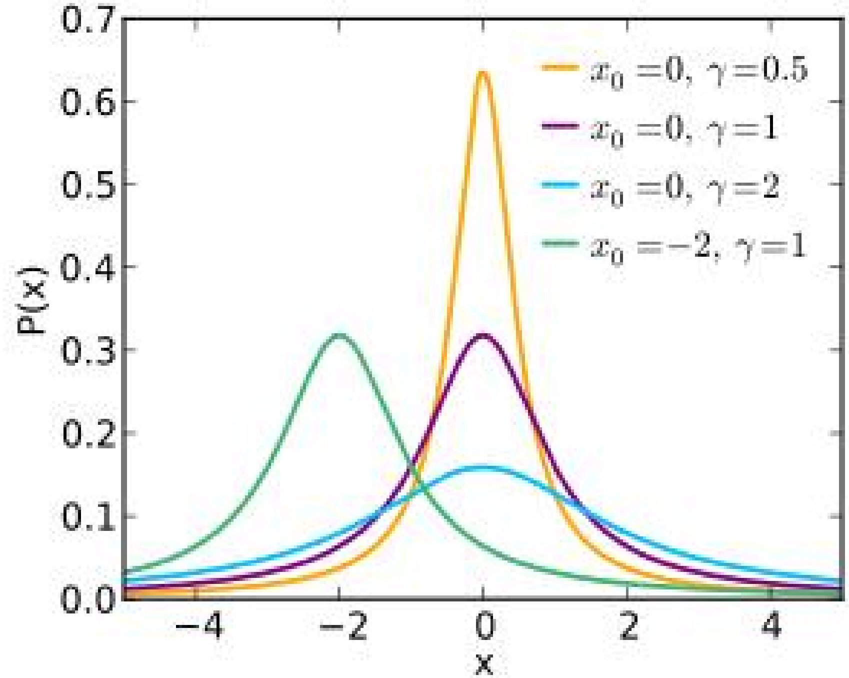
$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{1+x'^2}\,dx'$$

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\left(\arctan(x)+\frac{\pi}{2}\right)=y$$

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\left(\left|\arctan(x')\right|_{x'=x}-\left|\arctan(x')\right|_{x'=-\infty}\right)$$

- Bestimmung der Inverse:

$$x=\tan\left(y\pi-\frac{\pi}{2}\right)=-\cot(y\pi)\Rightarrow x=\cot(y\pi)$$



- Der Quotient von zwei normalverteilten Zufallszahlen ist Breit Wigner verteilt
- Beweisstruktur:

$$P\left(\frac{x_1}{x_2}<y\right)=\iint\limits_{\frac{x_1}{x_2}<y} f_G(x_1,x_2)\,d(x_1,x_2)$$

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1 x_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x_1 x_2}{\partial x_2}\\ \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_2 & x_1\\ 0 & 1\end{vmatrix}$$

- Transformation:

$$(x_1,x_2)\rightarrow(x_1 x_2,x_2)$$

$$\iint\limits_{x_1<y} f_G(x_1 x_2,x_2)\,|det(J)|\,d(x_1,x_2)$$

$$\Rightarrow\int\limits_{-\infty}^{x_1=y}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_G(x_1 x_2)\,f_G(x_2)\,|x_2|\,dx_2\,dx_1=\int\limits_{-\infty}^{x_1=y} f_B(x_1)\,dx_1$$

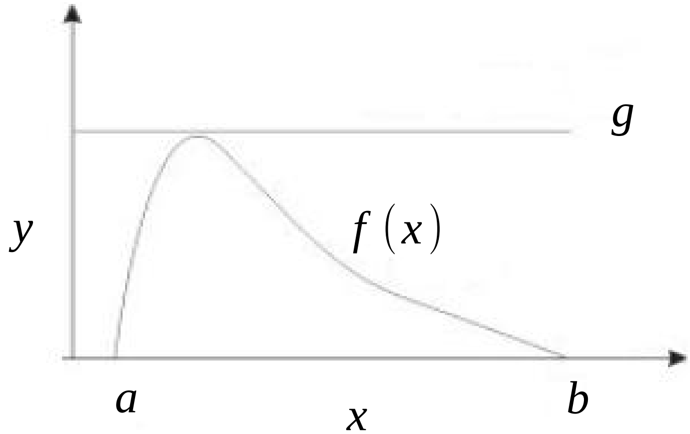
- Gefaltete Dichtefunktion:

$$f_B(x_1)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_G(x_1 x_2)\,f_G(x_2)\,|x_2|\,d x_2=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x_1^2 x_2^2+x_2^2)}{2}}|x_2|\,dx_2$$

$$f_B(x_1)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} e^{\frac{-x_2^2}{2}(x_1^2+1)}x_2\,dx_2=\frac{1}{\pi}\frac{1}{(x_1^2+1)}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-v}\,dv$$

Verwerfungsmethode

- Pro Versuch: Erzeugungen von 2 gleichverteilten Zufallszahlen

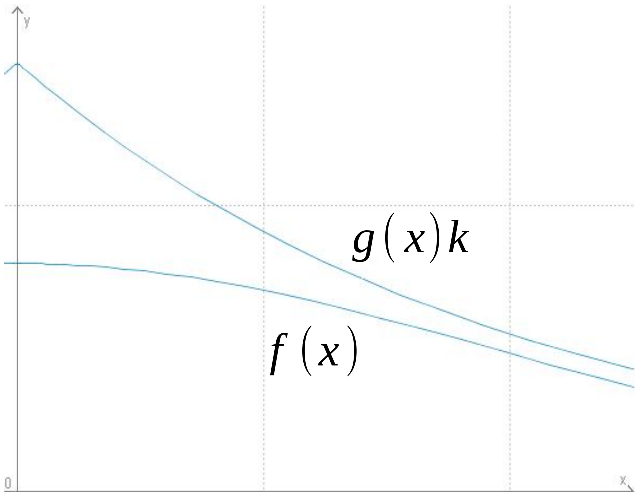


$$x = a + (b - a)\,zuf_1$$
$$y = zuf_2\, g$$

- Zahl wird Akzeptiert, wenn

$$y < f(x)$$

- Größere Verwerfungsfläche → Längere Rechendauer



- X ist nun g(x)-verteilt

- Akzeptanzbedingung:

$$zuf_2 < \frac{f(x)}{g(x)k}$$

Polar-Methode

- Ähnlich zur Box-Müller-Methode, aber schneller (da ohne trigonometrischen Funktionen)

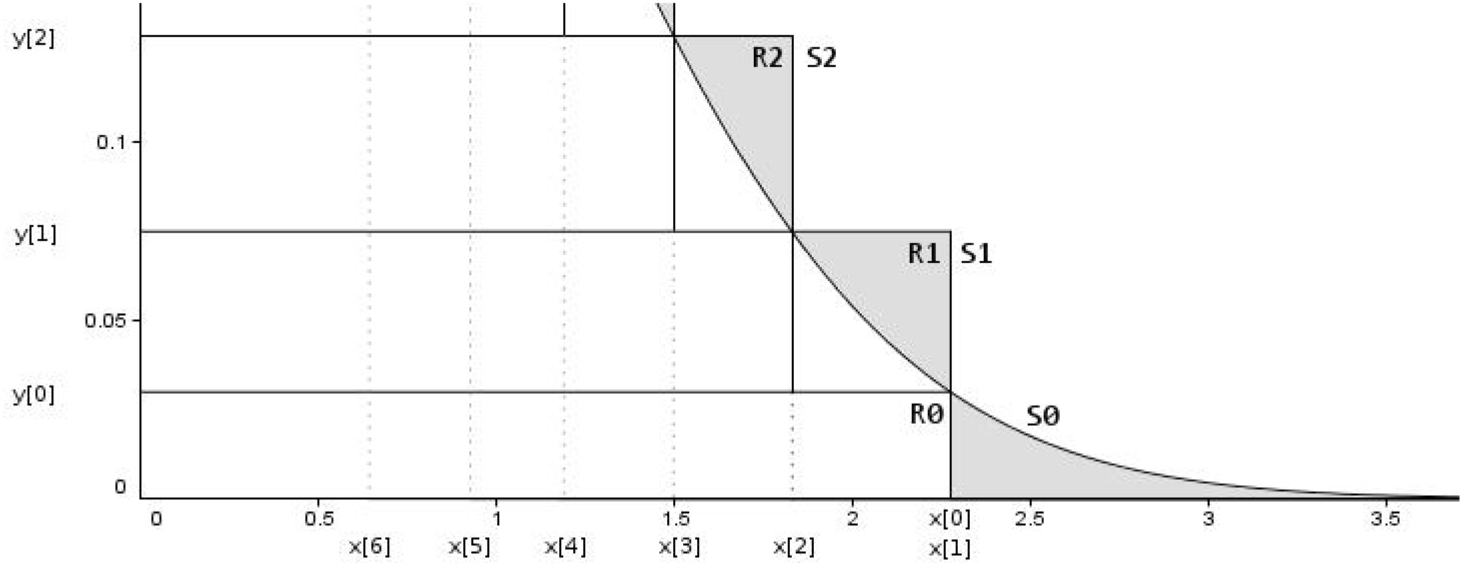
1. Erzeugen von 2 Zufallszahlen (x_1, x_2) im Intervall [-1,1]

2. $s = x^2 + y^2 < 1$ sonst werden die Zahlen verworfen

3. Berechnung der normalverteilten Zufallsvariablen über

$$y_1 = x_1 \sqrt{\frac{-2\ln(s)}{s}} \qquad y_2 = x_2 \sqrt{\frac{-2\ln(s)}{s}}$$

Ziggurat-Methode



- Verwendung bei monoton fallenden Funktionen(oder einigen symmetrischen)
- Einteilung der Funktion in gleichgroße Rechtecke R_i
- Pro Versuch: 1. Auswählen eines zufälligen R_i

  2. Zufallszahl im Intervall $[0,x_i]$

  3. im Rechteck: Wert wird genommen

  sonst: normale Verwerfungsmethode anwenden

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit

DRESDEN concept
Exzellenz aus Wissenschaft und Kultur