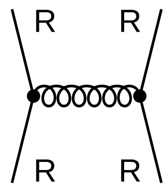
Übungsblatt Nr. 4

Besprechung am 8.6.

Aufgabe 4.1: Farbfaktoren

a) Zeigen Sie anhand des in der Vorlesung diskutierten Gluon-Oktetts, dass die Kopplungsstärke zwischen zwei roten (R) Quarks identisch zu der schon berechneten zwischen zwei blauen Quarks ist, und somit SU(3)-Invarianz gewahrt ist.



b) Die Generatoren der QCD können durch die Gell-Mann-Matrizen als $t^A = \frac{1}{2}\lambda^A$ dargestellt werden. Berechnen Sie mit Hilfe der entsprechenden Feynman-Regeln und ausgeteilten Identitäten noch einmal den Farbfaktoranteil der Kopplungsstärke für die in 4.1 a) diskutierten Diagramme.

c) Der Wirkungsquerschnitt von Streuprozessen berechnet sich aus dem Betragsquadrat von Amplituden entsprechend der Feynman-Regeln. Die Farbanteile einer Amplitude können dabei immer abfaktorisiert und separat berechnet werden, ohne die "kinematischen" Feynmanregeln auswerten zu müssen. Man beachte, dass wir genau wie für den Spin auch für die nicht-beobachteten Farbzustände absummieren bzw. mitteln müssen.

Betrachten Sie das t-Kanal-Diagramm des Prozesses $gq \to \gamma q$ in führender Ordnung. Berechnen Sie den Farbfaktor für den Wirkungsquerschnitt dieses Prozesses.

Aufgabe 4.2: Laufende Kopplung

Zeigen Sie, dass eine Änderung der Renormierungsskala in der laufenden Kopplung $\alpha_s(\mu)$ zu einem Effekt der Ordnung α_s^2 führt.

Aufgabe 4.3: Lokale Eichinvarianz der QCD-Lagrangedichte

Die Lagrangedichte der QCD lässt sich durch die kovariante Ableitung folgendermaßen darstellen:

$$\mathcal{L} = i\,\bar{\psi}_a\,\not{D}_{ab}\,\psi_b \;-\; \frac{1}{4}F^A_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_A \quad \text{, with } a, b = 1\ldots3 \tag{1}$$

$$D^\mu_{ab} = \delta_{ab}\partial^\mu + i\,g_s\,t^A_{ab}\mathcal{A}^\mu_A \quad \text{, with } A, B, C = 1\ldots8 \tag{2}$$

$$F^A_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathcal{A}^A_\nu - \partial_\nu\mathcal{A}^A_\mu - g_s f^{ABC}\mathcal{A}^B_\mu\mathcal{A}^C_\nu \tag{3}$$

$$[t^A, t^B] = i f^{ABC} t^C, \quad \mathrm{Tr}\,[t^A t^B] = \frac{1}{2}\delta^{AB} \tag{4}$$

a) Betrachten Sie eine beliebige lokale SU(3)-Eichtransformation $\Omega(x) \equiv \exp\left(i\,\theta^C(x)\,t^C_{ab}\right)$. Geben Sie das Verhalten der Quarkfelder $\psi_a \to \psi'_a$ und Gluonfelder $\mathcal{A}^C t^C \to \mathcal{A}'^C t^C$ unter einer solchen Transformation an.

Hinweis: Um die Gluontransformation zu finden, gehen Sie davon aus, dass sich die kovariante Ableitung genauso transformiert wie das Feld:

$$D_\mu \psi(x) \to D'_\mu \psi'(x) \equiv \Omega(x) D_\mu \psi(x) \tag{5}$$

b) Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

$$[D_\mu, D_\nu] = i\, g_s\, t^A F^A_{\mu\nu} \tag{6}$$

c) Zeigen Sie, dass die Lagrangedichte unter einer lokalen Eichtransformationen wie in 4.3 a) invariant ist.

d) Kann man einen naiven Gluon-Masseterm der Art $\mathcal{L}_m = m^2 \mathcal{A}^\mu \mathcal{A}_\mu$ eichinvariant hinzufügen?