Prof. Dr. Dominik Stöckinger
Dr. Frank Siegert

Übungsblatt Nr. 5

Besprechung am 12.6.

Aufgabe 5.1: Reelle Emissionen als Teil der NLO-Korrektur

Wir möchten die QCD-Korrekturen für den reinen QED-Prozess $e^+e^- \to \gamma^* \to q\bar{q}$ berechnen. Um die Rechnungen zu vereinfachen, amputieren wir den leptonischen Strom und betrachten nur den "Zerfall" eines virtuellen Photons $\gamma^* \to q\bar{q}$.

Ein Teil der QCD-Korrekturen auf Ordnung α_s wird durch die Abstrahlung eines reellen Gluons gegeben und soll in dieser Aufgabe betrachtet werden.

a) Zeichnen Sie alle möglichen Feynman-Diagramme für $\gamma^* \to q\bar{q}g$.

b) Stellen Sie mit Hilfe der Feynman-Regeln alle Amplituden auf.

c) Zeigen Sie durch Berechnung aus den Amplituden, dass sich das betragsquadrierte und spin-gemittelte Matrixelement für $\gamma^*(Q) \to q(p_1)\bar{q}(p_2)g(p_3)$ ergibt als:

$$|\mathcal{M}_R|^2 = 32e^2 e_q^2 g_s^2 \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)}$$

Verwenden Sie dabei die kinematischen Variablen $x_i \equiv \frac{2E_i}{Q}$ mit $Q = E_{\text{cm}} = \sqrt{Q^2} \equiv \text{const.}$

Für die Summation über die (vermeintlichen) Spin-Freiheitsgrade des virtuellen Photons (und später auch beim Gluon) soll die Vollständigkeitsrelation in Feynman-Eichung benutzt werden:

$$\sum_\lambda \epsilon_\mu(\lambda)\epsilon_\nu^*(\lambda) \to -g_{\mu\nu}$$

d) Zur Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnittes benötigen wir noch das Phasen-raumelement für den 3-Teilchen-Endzustand:

$$\mathrm{d}\Phi(Q, p_1, p_2, p_3) = \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{2E_1(2\pi)^3} \frac{\mathrm{d}^3 p_2}{2E_2(2\pi)^3} \frac{\mathrm{d}^3 p_3}{2E_3(2\pi)^3} \cdot (2\pi)^4\, \delta^4(Q - p_1 - p_2 - p_3)$$

Dieses soll im folgenden über die im Matrixelement nicht vorkommenden Freiheitsgrade ab-integriert werden:

i) Der Impulsanteil der δ-Funktion kann genutzt werden, um den Impuls $\vec{p}_3$ zu eliminieren.

ii) Die Phasenraumelemente können in Polarkoordinaten ausgedrückt werden:

$$\frac{\mathrm{d}^3 p_i}{2E_i} = \frac{1}{2} E_i \mathrm{d}(\cos\theta_i)\mathrm{d}\phi_i \mathrm{d}E_i$$

iii) Durch Wahl der z-Achse in Richtung von p_1 lassen sich die Winkelintegrationen auf eine über $\cos(\theta_2 - \theta_1)$ reduzieren. Diese kann unter Benutzung von

$$\frac{\delta(Q - E_1 - E_2 - E_3)}{2E_3} = \delta\left((Q - p_1 - p_2 - p_3)^2\right)$$

ausgeführt werden und es ergibt sich

$$\mathrm{d}\Phi(Q, p_1, p_2, p_3) = \frac{Q^2}{16(2\pi)^3} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$$

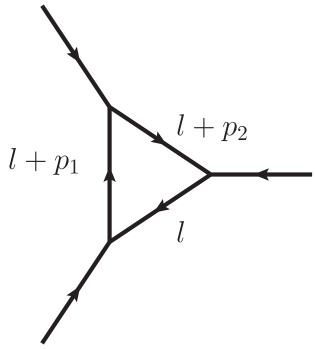
Aufgabe 5.2: Virtuelle Korrekturen

Wir betrachten weiterhin den Prozess $\gamma^* \to q\bar{q}$ wie oben.

a) Zeichnen Sie alle 1-Schleifendiagramme der QCD-Korrektur $\sim \alpha_s$ und stellen Sie die Amplitude des Vertexkorrektur-Diagramms auf.

b) Das Vertexkorrekturdiagramm enthält unter Annahme der nebenstehenden Impulskonfiguration unter anderem einen Beitrag mit folgendem 1-Schleifenintegral:

$$
\begin{aligned}
C^\mu(p_1^2, p_2^2; m_0, m_1, m_2) &\equiv \int \mathrm{d}^4\ell \frac{\ell^\mu}{D_0 D_1 D_2} \\
D_0 &= \ell^2 - m_0^2 \\
D_{1,2} &= (\ell + p_{1,2})^2 - m_{1,2}^2
\end{aligned}
$$



Zeigen Sie mit Hilfe von Passarino-Veltman-Reduktion, dass dieses Integral auf die folgenden Masterintegrale reduziert werden kann:

$$
\begin{aligned}
B_0(k_1^2; M_1, M_2) &= \int \mathrm{d}^4\ell \frac{1}{[\ell^2 - M_0^2]\,[(\ell + k_1)^2 - M_1^2]} \\
C_0(k_1^2, k_2^2; M_1, M_2, M_3) &= \int \mathrm{d}^4\ell \frac{1}{[\ell^2 - M_0^2]\,[(\ell + k_1)^2 - M_1^2]\,[(\ell + k_2)^2 - M_2^2]}
\end{aligned}
$$