Übungsblatt Nr. 8

Besprechung am 13.7.

Aufgabe 8.1: Infrarot-sichere Observablen

Betrachten Sie folgende Observablen in $e^+e^- \to n$-Parton-Produktion mit Partonimpulsen $p_1 \dots p_n$ und diskutieren Sie, ob diese infrarot/kollinear-sicher sind.

a) Anzahl von Partonen

$$O(p_1, \dots, p_n) = n$$

b) Invariante Masse (zum Quadrat) des Endzustandes

$$O(p_1, \dots, p_n) = \left(\sum_i p_i \right)^2$$

c) Höchste Energie eines Partons

$$O(p_1, \dots, p_n) = \max_i E_i$$

d) Thrust

$$O(p_1, \dots, p_n) = \max_{\vec{n}} \frac{\sum_i |\vec{p}_i \cdot \vec{n}|}{\sum_i |\vec{p}_i|}$$

e) Sphericity

$$O(p_1, \dots, p_n) = \frac{3}{2}(Q_1 + Q_2) \quad \text{mit } Q_1 \geq Q_2 \geq Q_3 \text{ Eigenwerte des Sphericity-Tensors:}$$

$$S^{\alpha\beta} = \frac{\sum_i p_i^\alpha p_i^\beta}{\sum_i |\vec{p}_i|^2} \text{ für } \alpha, \beta = 1, 2, 3 \ (x, y, z)$$

Aufgabe 8.2: Jet-Algorithmen

Betrachten Sie folgende Jet-Algorithmen für $e^+e^- \to$ Hadronen und diskutieren Sie die Infrarot/Kollinear-Sicherheit der dadurch gefundenen N-Jet-Raten.

a) Sterman-Weinberg Jets

Eine kinematische Konfiguration $p_1 \dots p_n$ wird als 2-Jet-Konfiguration gezählt, falls mindestens ein Anteil $1 - \varepsilon$ der totalen Energie in zwei Kegeln des Öffnungswinkels δ liegt. Die Parameter $0 < \varepsilon < 1$ und $\delta > 0$ sind frei wählbar.

b) "Iterative Cone mit Progressive Removal"

Das Teilchen mit der größten Energie wird als Startimpuls p_i ausgewählt ("seed"), und alle Impulse p_j in einem Rapiditäts-Azimuthal-Abstand $\Delta R_{ij}^2 = (\eta_i - \eta_j)^2 + (\phi_i - \phi_j)^2 < R^2$

("cone") werden dazu addiert, um einen Jet-Impuls zu ergeben. Diese Prozedur wird mit dem sich ergebenden Jet-Impuls als Startwert wiederholt, bis der Impuls sich nicht mehr ändert.

Dann werden alle zu diesem Jet gehörigen (Teilchen-)Impulse ignoriert, und mit der gleichen Prozedur der nächste Jet unter den verbleibenden Impulsen gefunden.

Der Parameter $R > 0$ ist frei wählbar.

c) "Durham (k_t) Algorithmus"

1. Berechne für jedes Paar von Teilchen i, j die "Entfernung"

$$y_{ij} = \frac{2\min(E_i^2, E_j^2)(1-\cos\theta_{ij})}{Q^2}. \tag{1}$$

2. Finde das Paar mit der minimalen Entfernung y_{min}.

3.a Falls y_{min} unterhalb einer vorgegebenen Schwelle y_{cut} liegt, werden i und j durch ein kombiniertes "Teilchen" mit Gesamtimpuls $p = p_i + p_j$ ersetzt und die Prozedur beginnt bei Schritt 1.

3.b Sonst werden alle verbleibenden "Teilchen" als Jets deklariert und die Iteration beendet.

Der Parameter $y_{\text{cut}} > 0$ ist frei wählbar.

Aufgabe 8.3: Jetraten in e^+e^- mit dem JADE-Algorithmus

In Aufgabe 5.1 wurde der differentielle Wirkungsquerschnitt für $e^+e^- \to q\bar{q}g$ berechnet:

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2} = \sigma_0 C_F \frac{\alpha_s}{2\pi}\frac{x_1^2+x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)} \tag{2}$$

Dabei bezeichnet σ_0 den Born-Wirkungsquerschnitt für $e^+e^- \to q\bar{q}$.

In dieser Aufgabe wollen wir darauf aufbauend Vorhersagen für Jetproduktion entsprechend des JADE-Algorithmus berechnen.

a) Geben Sie die Born-Vorhersage (LO) für den 2-Jet-Anteil an, also das Verhältnis von 2-Jet-Wirkungsquerschnitt zu Gesamtwirkungsquerschnitt, $f_2^{\text{LO}} = \frac{\sigma(\text{2-jet})}{\sigma}$.

b) Um den 3-Jet-Anteil $f_3^{\text{NLO}} = \frac{\sigma(\text{3-jet})}{\sigma}$ aus der NLO-Vorhersage zu bestimmen, müssen wir Eq. (2) über die vom JADE-Algorithmus vorgegebenen Grenzen integrieren.
Stellen Sie für ein gegebenes $y_{\text{cut}} \leq \frac{1}{3}$ die Integrationsgrenzen für x_1 und x_2 auf.

c) Berechnen Sie das Integral in diesen Grenzen und damit $f_3^{\text{NLO}}(y_{\text{cut}})$.

Dabei dürfen Sie den Dilogarithmus $\mathrm{Li}_2(x) = -\int_0^x \mathrm{d}y \frac{\ln(1-y)}{y}$ verwenden.

d) Finden Sie (ggf. numerisch) den Wert y_{cut}, bei dem $f_2^{\text{NLO}}(y_{\text{cut}}) \equiv f_3^{\text{NLO}}(y_{\text{cut}})$. Ist die NLO-Vorhersage in diesem Phasenraumbereich vertrauenswürdig?