Übungsblatt Nr. 9

Besprechung am 24.7.

Aufgabe 9.1: Plus-Distributionen

Wir werden Plus-Distributionen benutzen, um die virtuellen Anteile in den Splittingfunktionen $P(x)$ mit unter das x-Integral ziehen zu können. Sie können folgendermaßen definiert werden:

$$[F(x)]_+ = \lim_{\beta\to 0}\left\{F(x)\,\theta(1-x-\beta) - \delta(1-x-\beta)\int_0^{1-\beta}\mathrm{d}y\,F(y)\right\} \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass das Integral über einen reinen "+"-Integranden damit verschwindet:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\,[F(x)]_+ = 0$$

Aufgabe 9.2: Virtuelle Anteile in der Splittingfunktion

Betrachten Sie die Splittingfunktion für die reelle Gluonemission von einer Quarklinie:

$$\hat{P}(x) = C_F\,\frac{1+x^2}{1-x}.$$

a) Überlegen Sie sich aus der kinematischen Konfiguration, dass die α_s-Anteile der partonischen Strukturfunktion $\hat{F}_2(x)$ aus virtuellen Diagrammen proportional zu $\delta(1-x)$ sein müssen. Nehmen Sie damit also an, dass diese Beiträge in die Splittingfunktion $P(x) = \hat{P}(x) + \mathrm{const}\cdot\delta(1-x)$ absorbiert werden können.

b) Betrachten Sie den α_s-Anteil der Quarkverteilungs-Funktion $q(x,\mu^2)$. Mit der Erhaltung der Baryonenzahl kann man argumentieren, dass die x-integrierte Quarkverteilung nicht von μ^2 abhängen darf, und deshalb das x-Integral über $P(x)$ verschwinden muss: $\int_0^1 \mathrm{d}x\,P(x) = 0$.

Eine Lösung für diese Bedingungen bildet die Definition von $P(x)$ als reine "+"-Distribution:

$$P(x)/C_F = \left[\frac{1+x^2}{1-x}\right]_+$$

Zeigen Sie mit (1), dass diese sich darstellen lässt als:

$$P(x)/C_F = \frac{1+x^2}{(1-x)_+} + C\,\delta(1-x)$$

und bestimmen Sie C.

Aufgabe 9.3: Integrationsvariablen im Anfangszustand

Für die Kollision zweier Hadronen sei die Schwerpunktsenergie $\sqrt{s}$ gegeben.

a) Schreiben Sie die 4er-Impulse der Hadronen, P_1 und P_2, im Schwerpunktssystem auf. Dabei soll die Hadronmasse vernachlässigt werden und die Hadronen sich entlang der z-Achse bewegen.

Wir betrachten nun eine partonische Wechselwirkung zweier Konstituenten aus diesen Hadronen, deren Impulse sich als $p_1 = x_1 P_1$ und $p_2 = x_2 P_2$ ergeben. Zeigen Sie, dass sich die Rapidität des partonischen Schwerpunktssystem dann als $y = \frac{1}{2}\log(\frac{x_1}{x_2})$ ergibt.

b) Für den hadronischen Wirkungsquerschnitt ergibt sich mit den Parton-Verteilungsfunktionen f_i:

$$\sigma = \sum_{ij} \int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_0^1 \mathrm{d}x_2 \, f_i(x_1)\, f_j(x_2)\, \hat{\sigma}_{ij}$$

Zeigen Sie, dass dieser zu

$$\sigma = \sum_{ij} \frac{1}{s} \int \mathrm{d}\hat{s} \int \mathrm{d}y \, f_i(x_1)\, f_j(x_2)\, \hat{\sigma}_{ij}$$

transformiert werden kann, wobei $\hat{s} = s\, x_1 x_2$.

Aufgabe 9.4: Drell-Yan-Produktion an Hadronenbeschleunigern

Analog zu $e^+e^- \to q\bar{q}$ ergibt sich der integrierte partonische Wirkungsquerschnitt für $q\bar{q} \to e^+e^-$ mit einem virtuellen Photon in führender Ordnung zu:

$$\hat{\sigma}(q\bar{q} \to e^+e^-) = \sigma_0 \frac{e_q^2}{N_c}, \quad \sigma_0 = \frac{4\pi\alpha^2}{3\hat{s}}$$

a) Zeigen Sie, dass der differentielle Wirkungsquerschnitt in der invarianten Masse des Leptonpaares $m_{\ell\ell}^2$ damit lautet:

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}m_{\ell\ell}^2 \mathrm{d}y} = \frac{\sigma_0}{N_c\, s} \sum_q e_q^2 \left[f_q(x_1) f_{\bar{q}}(x_2) + f_q(x_2) f_{\bar{q}}(x_1) \right]$$

b) Betrachten Sie die ATLAS-Messung bei $\sqrt{s} = 7$ TeV unter `http://arxiv.org/pdf/1404.1212.pdf`.

Berechnen Sie für den ersten Datenpunkt in Fig. 5 die Vorhersage $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}m_{\ell\ell}^2}$ entsprechend obiger Rechnung unter der Annahme $y = 0$.

Benutzen Sie dafür Parton-Verteilungsfunktionen (PDFs) aus der "MSTW-LO"-Serie für up-, down- und strange-(Anti-)Quarks. Diese lassen sich z. B. unter `http://hepdata.cedar.ac.uk/pdf/pdf3.html` berechnen.

Für die Auswertung der PDFs können Sie sinnvollerweise eine Faktorisierungsskala $\mu^2 = m_{\ell\ell}^2$ wählen, um die Korrekturen aus höheren Ordnungen klein zu halten.